c. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{2}{3}]$,
$\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(x^2+1)} \leq \frac{2}{3}$.
d. En déduire que pour tout x de
$[0, \frac{2}{3}], |\varphi(x)-\alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$.
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$.
b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$.
c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α et vérifier que $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

25 A/ Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par
$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.
On désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b. Etudier les variations de f.
c. Ecrire une équation de la tangente T à C_1 au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
d. Tracer C_1 et T.
2. Sur le même graphique, tracer C_2 la courbe représentative de la fonction $(-f)$.
3. Soit $C = C_1 \cup C_2$. Montrer que C a pour équation cartésienne $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.
B/ Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ et Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Une droite D passant par O, recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en N et la tangente Δ en Q. On désigne par M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. On désigne par Γ l'ensemble des points M lorsque la droite D varie.
1. Donner une équation cartésienne de Δ et $\mathscr{C}$.
2. On désigne par m le coefficient directeur de la droite D. Ecrire une équation cartésienne de D.
3. a. Montrer que les coordonnées de N sont
$\left(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2}\right)$.
b. En déduire que les coordonnées de M sont
$\left(\frac{m^2}{1+m^2}, \frac{m^3}{1+m^2}\right)$.
c) Vérifier que M appartient à la courbe C.
4. Soit $M(x, y)$ un point de C.
a) Montrer que si $x = 0$ alors $M \in \Gamma$.
b) On suppose que x est non nul et on pose $m = \frac{y}{x}$.
Exprimer x et y en fonction de m.
En déduire que M appartient à Γ.
c. Montrer que $\Gamma = C$.
C/ Soit t un réel strictement positif et D_t la droite d'équation $y = tx$.
La droite D_t coupe Γ en M et Δ en Q.
La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en P.
1. a. Montrer que les coordonnées de P sont $(0, t^3)$.
b. Vérifier que $AQ = t$.
2. En déduire une construction d'un segment de longueur $\sqrt[3]{t}$, en utilisant la courbe Γ.

26 A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.
On notera f^{-1}, la fonction réciproque de f.
b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$.
b. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.
c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,
$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.
3. Tracer dans un repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn